

1. (a) Sexa $\{(x_n, y_n)\}$ unha sucesión en $\mathbb{R}^2$. Demostra que converge a un punto (x_0, y_0) se e soamente se cada sucesión numérica $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ converge, respectivamente, a x_0 e y_0 .
- (b) Considera o subconxunto A de $\mathbb{R}^2$ formado polos puntos da forma $(1/n, 1/m)$, con $n, m \in \mathbb{N}$ e $n \neq m$. Fai un debuxo que axude a visualizar este conxunto.
- (c) Sexan a e b dous enteiros naturais dados. Razona cales dos seguintes puntos son de acumulación de A :

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right); \quad \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right); \quad \left(\frac{1}{a}, 0\right); \quad \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a+1}\right); \quad (0, 0).$$

Para cada punto que sexa de acumulación, constrúe unha sucesión de puntos de A converxendo a el.

- (d) ¿Cónceces algún punto de acumulación que non se inclúa na lista anterior? Calcula a adherencia de A .

(2,5 puntos)

2. Estudia a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (y, x) & \text{se } x \geq y, \\ (x, y) & \text{se } x < y. \end{cases}$$

(2 puntos)

3. Sexa $A \subset \mathbb{R}^p$. Demostra a igualdade

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(x, A) = 0\}.$$

(2 puntos)

4. (a) Sexan X un subconxunto compacto non baleiro de $\mathbb{R}^n$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua. Probade que f alcanza un máximo e un mínimo. Mostrade que o resultado é falso se X non é pechado ou limitado.
- (b) Probade que o conxunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y| \leq 1\}$$

é compacto.

- (c) Determinade o máximo e o mínimo alcanzados pola función

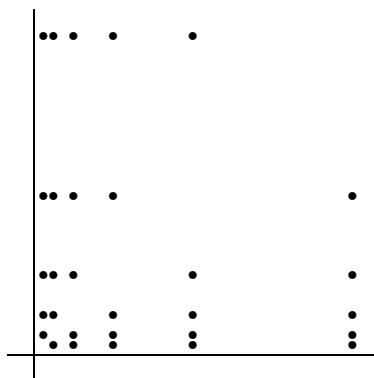
$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- (d) Determinade se os conxuntos A e $B = A - \{(0, 0)\}$ son conexos ou non.

(3,5 puntos)

1. (b) Debuxo de algúns puntos do conxunto A . Os restantes están cada vez máis próximos aos eixos:



- (c) Os puntos $(0, 0)$ e $(1/m, 0)$ son de acumulación. As seguintes sucesións de puntos de A converxen a eles:

$$\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right) \right\} \rightarrow (0, 0) ; \quad \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n+m} \right) \right\} \rightarrow \left(\frac{1}{m}, 0 \right) .$$

Os outros dous son puntos aillados: bolas de raios $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$ e $\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}$ e de centro $(1/m, 1/m)$ e $(1/m, 1/m + 1)$, respectivamente, non conteñen outros puntos do conxunto.

- (d) Polo mesmo argumento de converxencia antes usado, os puntos da forma $(0, 1/m)$ tamén son de acumulación. Todos os puntos de acumulación e todos os puntos do conxunto son adherentes.

2. Iremos comprobar que f é continua en todo $\mathbb{R}^2$. Iremos facer de tres formas diferentes.

Primeira forma.

A función non aumenta as distancias,

$$d(f(x, y), f(u, v)) \leq d((x, y), (u, v)),$$

o que significa que f é lipschitziana. Desde logo, se $x < y$ e $u < v$, ou se $x > y$ e $u > v$, daquela, obviamente, as distancias consérvanse. Supoñamos, por contra, $x < y$ e $u > v$. Sexa (z, z) o punto de corte coa diagonal da recta que une estes puntos. É:

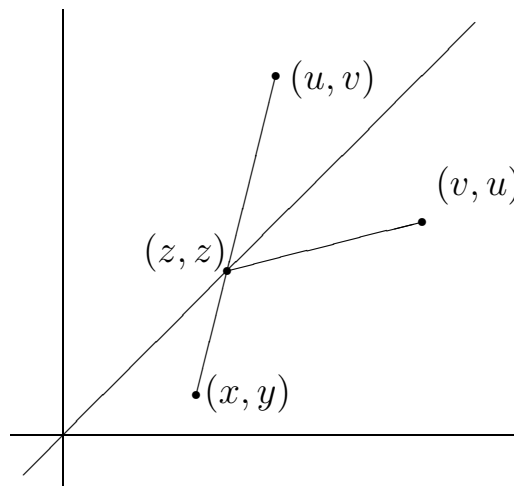
$$f((x, y)) = (x, y),$$

$$f((u, v)) = (v, u).$$

Tense:

$$d((z, z), (u, v)) = d((z, z), (v, u));$$

$$d((v, u), (x, y)) \leq d((v, u), (z, z)) + d((z, z), (x, y)).$$



Segunda forma.

Observade que a función tamén pode ser definida da seguinte maneira:

$$f(x, y) = \begin{cases} (y, x) & \text{se } x \geq y, \\ (x, y) & \text{se } x \leq y, \end{cases}$$

pois as dúas fórmulas coinciden na diagonal. Agora resulta ser función combinada de dúas funcións continuas con dominios pechados. Logo a función resultante é continua.

Terceira forma.

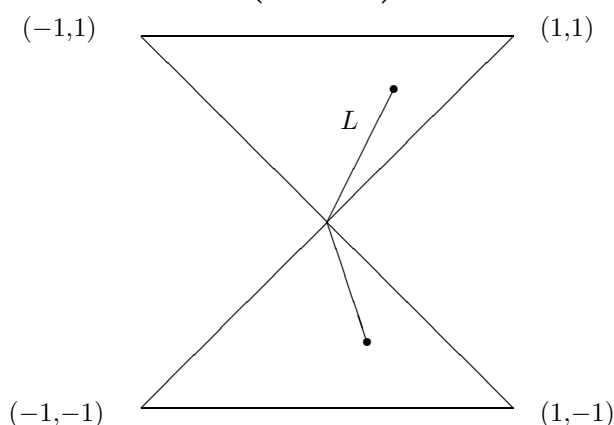
As restriccións da función aos conxuntos abertos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ son claramente continuas, logo a función é continua nos puntos deses conxuntos.

A continuidade nun punto (z, z) da diagonal pódese deducir da definición, utilizando $\delta = \epsilon$, pois a distancia dun punto (x, y) ao punto (z, z) é a mesma que a distancia de (z, z) ao punto (y, x) .

-
4. (b) Debuxemos o conxunto A . Comezamos debuxando o conxunto dos puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ verificando $|x| = |y|$. Ou sexa, con $x = y$ ou $-x = y$. Son as ecuacións de dúas rectas, o conxunto está formado polas dúas diagonais. Os puntos do conxunto A verifican $|x| \leq |y|$. Ou sexa, $|x| \leq y$ ou $|x| \leq -y$. A primeira relación ten sentido para $y \geq 0$. Para estes puntos a condición equivale ás dúas seguintes: $x \leq y$ e $-x \leq y$, ou sexa, os puntos que están por riba das dúas diagonais. Chamaremos C a este conxunto.

Analogamente, para $y \leq 0$, resultaría o conxunto D dos puntos que están por baixo das dúas diagonais. Finalmente, a condición $|y| \leq 1$

define o conxunto E dos puntos con ordenada comprendida entre -1 e 1 . Así, expresamos o conxunto dado como:

$$A = (C \cup D) \cap E.$$


Cada conxunto C , D e E é pechado, polo que A é un conxunto pechado. Tamén é limitado: está contido na bola $B_2[(0,0), \sqrt{2}]$. Logo A é compacto.

- (c) A función toma valores non negativos. Como vale 0 en $(0,0)$, este é o mínimo.

Xa que para calquera número real t , $t \leq 1 \Rightarrow t^2 \leq 1$, e non hai puntos con coordenadas maiores que 1 , o máximo resulta ser 2 , que se alcanza, por exemplo, no punto $(1,1)$.

- (d) A é conexo: dados dous puntos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de A , unimos cada un deles con $(0,0)$, o conxunto L resultante está contido en A , é unión de dous segmentos e teñen un punto común:

$$L_1 = \{(tx_1, ty_1) \mid 0 \leq t \leq 1\}, \quad L_2 = \{(tx_2, ty_2) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

e tomamos $L = L_1 \cup L_2$ (vid. figura).

B non é conexo. Unha separación non trivial é:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}.$$